Aula 5

Definição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, ou seja, uma variedade de dimensão 2, parametrizada (globalmente) por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, e seja $\phi : S \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo sobre a superfície. Então, define-se o **integral de ϕ sobre a superfície S**, e designa-se por

$$\int_S \phi \quad \text{ou} \quad \int_S \phi \, dS,$$

o valor

$$\int_\Omega \phi(g(u,v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du \, dv,$$

sempre que este integral (calculado sobre $(u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$) exista.

Em particular, fazendo $\phi = 1$, obtém-se a área da superfície S

$$A(S) = \mathrm{Vol}_2(S) = \int_S 1 \, dS = \int_\Omega \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du \, dv.$$

Propriedade: Sejam $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, e considere-se a matriz

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = (\det \Delta^T \Delta)^{1/2}.$$

O integral duma função ϕ sobre uma superfície S pode portanto também ser calculado como

$$\int_S \phi \, dS = \int_\Omega \phi(g(u,v))(\det Dg(u,v)^T Dg(u,v))^{1/2} du \, dv.$$

Definição: Dada uma parametrização $g : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ duma variedade de dimensão m, designa-se por **forma ou elemento de volume-m** a função

$$(\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} = \sqrt{\det G(u)},$$

para $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, e em que

$$G(u) = Dg(u)^T Dg(u),$$

é a chamada **matriz da métrica da variedade** formada pelos produtos internos das derivadas direcionais da parametrização

$$G_{i,j}(u) = \frac{\partial g}{\partial u_i}(u) \cdot \frac{\partial g}{\partial u_j}(u), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Definição: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão m, parametrizada (globalmente) por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, e seja $\phi : M \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo sobre a variedade. Então, define-se o **integral de ϕ sobre a variedade** M, e designa-se por

$$\int_M \phi \quad \text{ou} \quad \int_M \phi \, dV_m,$$

o valor

$$\int_\Omega \phi(g(u))(\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} du,$$

sempre que este integral (calculado sobre $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$) exista. Em particular, fazendo $\phi = 1$, obtém-se o volume m-dimensional da variedade M

$$\text{Vol}_m(M) = \int_M 1 \, dV_m = \int_\Omega (\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} du.$$

Invariância do integral para diferentes parametrizações

Proposição: Se uma mesma variedade M é parametrizada (globalmente) por duas parametrizações diferentes, digamos, $g : u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \to M \subset \mathbb{R}^n$ e $h : v \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m \to M \subset \mathbb{R}^n$, então $h^{-1} \circ g : \Omega \to \Lambda$ é uma mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^m$ e tem-se a relação entre os elementos de volume das duas parametrizações

$$(\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} = (\det Dh(v)^T Dh(v))^{1/2} \left| \det \frac{\partial v}{\partial u} \right|,$$

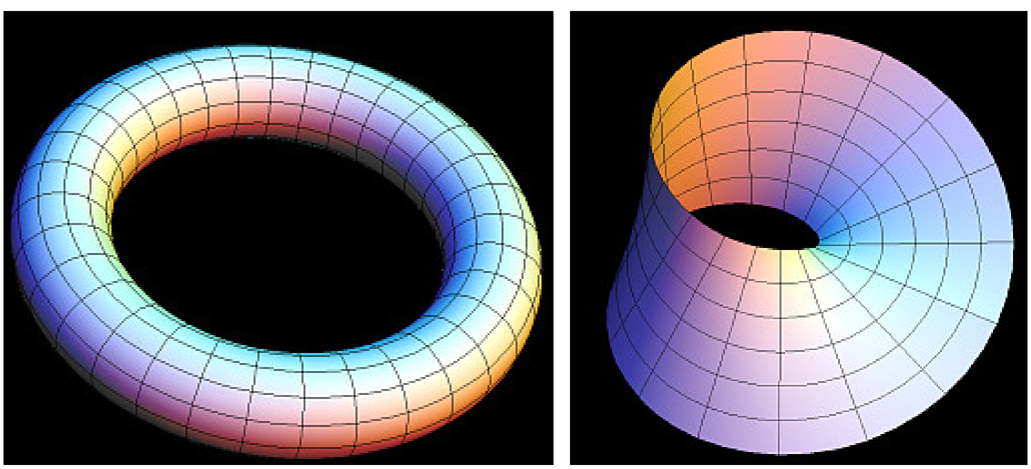
pelo que o integral sobre M é invariante

$$\int_\Omega \phi(g(u))(\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} du =$$

$$= \int_\Lambda \phi(h(v))(\det Dh(v)^T Dh(v))^{1/2} dv.$$

Fluxo através de uma superfície (orientável)

Definição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, isto é, uma variedade de dimensão 2. Diz-se que S **é uma superfície orientável** se existir um campo vetorial contínuo $\nu : S \to \mathbb{R}^3$ tal que em cada ponto $p \in S$ o vetor $\nu(x)$ é unitário e normal a S.
Quando tal é verificado, existem duas alternativas para esse campo, $\pm\nu$, e cada uma delas diz-se que define **uma orientação de** S (das duas possíveis).
Esta definição é generalizável a qualquer variedade $M \subset \mathbb{R}^n$, de dimensão $n - 1$ (designa-se por **hipersuperfície**).



Orientável vs Não-orientável

Definição: Seja $S \subset \mathbb{R}^n$, uma hipersuperfíce (variedade de dimensão $n-1$) orientável. Seja $\nu : S \to \mathbb{R}^n$ a escolha de uma das duas possíveis orientações de S e seja $\mathbf{F} : S \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo definido em S. Designa-se por **fluxo de $\mathbf{F}$ através de S na orientação dada por ν** o integral

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS.$$

Se S for parametrizada por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ este integral é dado pela fórmula

$$\int_\Omega \mathbf{F}(g(u)) \cdot \nu(g(u))(\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} du.$$

Proposição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, ou seja, uma variedade de dimensão 2, orientável, parametrizada (globalmente) por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, e seja $\mathbf{F} : S \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo sobre a superfície. Então, o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S é dado por

$$\pm \int_\Omega \mathbf{F}(g(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right) du \, dv,$$

com a escolha do sinal $\pm$ de acordo com a orientação escolhida para a superfície.